Lycée cantonal
Porrentruy

Examen de Maturité 2007
Discipline fondamentale

MATHÉMATIQUES

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 4 problèmes justes
- extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

---

Problème 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x}{1 - 2\ln(x)}$$

1. Étudier la fonction f.

   Durant l'étude, vous montrerez que la dérivée seconde est la suivante :

$$f''(x) = \frac{30 - 12\ln(x)}{x\left(1 - 2\ln(x)\right)^3}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente t au point d'inflexion.
3. Représenter graphiquement la fonction f avec la tangente t (unité : 1 carré).

Problème 2

Dans un repère orthonormé, on donne le triangle de sommets $A(3;4;9)$, $B(7;6;5)$ et $C(6;1;-3)$.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant le triangle ABC.
2. Calculer la mesure de l'angle de sommet A du triangle ABC.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.
4. Écrire une représentation paramétrique de la droite d qui coupe perpendiculairement les deux droites (AB) et (BC).
5. On considère la droite n orthogonale au plan π et passant par A.

   Calculer les coordonnées des points N, situés sur la droite n, tels que le triangle NAB soit isocèle en A.
6. On considère encore le point $S(11;-4;13)$. Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
7. Déterminer l'équation de la sphère tangente à la droite (AB) en B et ayant son centre sur la droite (AC).

(suite au verso)

Problème 3

Un jeu consiste à retourner des disques. Au début, quatre disques sont posés sur une table, et sur la face cachée de chacun de ces disques figure une instruction.

Il y a deux fois l'instruction P (comme "plus"), une fois l'instruction F (comme "fois") et une fois l'instruction S (comme "stop"). Le joueur retourne les disques l'un après l'autre, au hasard.

Au début du jeu, le joueur a 0 point. À l'apparition d'une instruction P, le nombre de points acquis est augmenté de 10 points. À l'apparition de l'instruction F, les points acquis sont multipliés par 2. À l'apparition de l'instruction S, le jeu s'arrête.

Exemple : avec la suite PFS, le joueur a $(0 + 10) \cdot 2 = 20$ points.

1. Une personne joue une fois à ce jeu. Calculer la probabilité des événements suivants :

   A : le jeu s'arrête après que le joueur ait retourné les quatre disques.

   B : le jeu s'arrête sans que l'instruction F apparaisse.

   C : le jeu s'arrête sur un total de 0 point.

   D : le jeu s'arrête sur un total d'au plus 20 points.

   E : le jeu s'arrête sur un total de 10 points, sachant que deux disques exactement ont été retournés.

2. Un groupe de 50 personnes, dont 20 hommes et 30 femmes, jouent une fois à ce jeu. Calculer la probabilité des événements suivants :

   F : exactement 7 personnes ont retourné les quatre disques.

   G : exactement 3 hommes et 4 femmes ont retourné les quatre disques.

   H : au moins 2 hommes ont retourné les quatre disques.

Problème 4

Les diverses parties de ce problème sont indépendantes.

1. Sous quel angle se coupent les graphes des fonctions $f(x) = 2x^3$ et $g(x) = 8 - 6x^3$?

2. Soient la parabole $y = 4 - x^2$ et un rectangle posé sur l'axe des x et dont les sommets supérieurs sont sur la parabole. Quelle est l'aire maximale d'un tel rectangle ?

3. Soient la parabole $y = x^2 - 3x + 2$ et la droite $y = x + 2$. Quelle est l'aire du domaine borné limité par ces deux courbes ?

4. Soit le domaine borné par l'axe des x et par le graphe de la fonction $f(x) = 1 + e^x$, pour x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Quel est le volume du solide de révolution engendré par la rotation de ce domaine autour de l'axe des x ?

5. (a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos^2(x) + \cos(x) = 0$.

   (b) Calculer $\int \sin(x) \cos(x)\, dx$.