CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2023**

Examen de mathématiques
OS scientifiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Étude de fonction (15 points)

Étudier, **sans la dérivée seconde**, puis représenter (unité : 4 carrés) la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{20\ln^3(x)}{x^2}.$$

Problème 2. Probabilités (20 points)

Monsieur Mouton, mal réveillé, ouvre son réfrigérateur tous les matins pour y prendre au hasard 3 pots de confiture indiscernables au toucher, parmi les 10 qui s'y trouvent, selon les catégories suivantes :

- fruits rouges : cerise, fraise et framboise (3 sortes) ;
- fruits jaunes : mirabelle et abricot (2 sortes) ;
- fruits exotiques : goyave, fruit de la passion, ananas, figue et mangue (5 sortes).

Il utilise ces trois confitures pour se préparer trois tartines, chacune avec une seule sorte de confiture. Il mange ensuite les trois tartines.

Dès qu'un pot est vide, il est remplacé par un nouveau pot plein avec la même sorte de confiture.

1. Montrer que la probabilité qu'un jour donné, il mange de la confiture de mangue vaut $\frac{3}{10}$.
2. Montrer que la probabilité qu'il mange une confiture de chacune des trois catégories vaut $\frac{1}{4}$.
3. Calculer la probabilité qu'il mange au moins une confiture de fruits rouges.
4. Calculer la probabilité qu'il mange de la confiture de mangue et d'au moins un fruit rouge.
5. Calculer la probabilité qu'il mange de la confiture de mangue sachant qu'il n'a pas mangé de confiture de fruits rouges.

Tous les matins, il procède de la même manière : il prend 3 pots parmi les 10 réfrigérés.

6. Calculer la probabilité que sur une semaine (lundi à dimanche), il ait mangé de la confiture de mangue exactement 2 jours.
7. Calculer la probabilité que sur une semaine (lundi à dimanche), il ait mangé de la confiture de mangue exactement 3 jours et exclusivement les confitures de fruits rouges exactement 2 jours.
8. Estimer la probabilité, sur une année de 365 jours, d'avoir mangé de la confiture de mangue entre 100 et 120 jours, bornes comprises.
9. Calculer le nombre moyen de confitures de fruits rouges dégustées par jour.

(suite au verso)

Problème 3. Géométrie dans l'espace (15 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(9;9;-4)$ et $B(-11;5;0)$.
On considère aussi la droite d passant par B de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

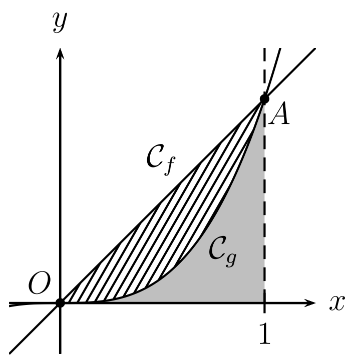
1. Établir une équation cartésienne du plan π orthogonal à la droite d et passant par le point B.
2. Calculer la distance du point A à la droite d.
3. Calculer l'angle aigu d'intersection entre la droite (AB) et le plan π.
4. Calculer les coordonnées du point C appartenant à la droite d tel que le triangle ABC soit rectangle en C.
5. On considère le cône Γ obtenu par rotation du triangle ABC autour de la droite (BC) qui est aussi la droite d. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère circonscrite au cône Γ.

Problème 4. Analyse (15 points)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$, dont les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ (pour une certaine valeur de α) sont esquissées ci-contre.



1. Déterminer la valeur de α telle que les aires des domaines grisé et haché soient égales.
2. À présent, on pose $\alpha = 3$ et donc $g(x) = x^3$. Soit un point D d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$ compris entre les points O et A. Soit également le point F de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse que D. Calculer l'abscisse x pour que l'aire du triangle FOD soit maximale.

Partie B

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $xy' + 2y = x\ln(x)$.

Problème 5. Algèbre linéaire (15 points)

1. On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ donné par sa matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer les valeurs propres de h et les sous-espaces propres associés.
   b) Donner une base de vecteurs propres de h et exprimer sa matrice relativement à cette base.
   c) Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme h.

2. a) Donner la matrice R de la rotation dans $\mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ centrée à l'origine et calculer R^{-1}.
   b) On note s la symétrie d'axe $y = 2x$ et de direction $y = -x$.
      i) Déterminer la base dans laquelle la matrice de la symétrie s s'écrit $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
      ii) Déterminer la matrice S de la symétrie s dans la base canonique.
   c) Vérifier que la matrice M définie par $M = RSR^{-1}$ est la matrice du point 1 du problème.