CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2022**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

OS non scientifiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80 (20 points par problème)
«Formulaires et tables» à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4\left(x^2 - 6x + 5\right)}{x^2}$.

1. Étudier complètement la fonction f.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe représentative de f avec son asymptote non verticale.
3. Représenter graphiquement la fonction f (unité : 1 carré).

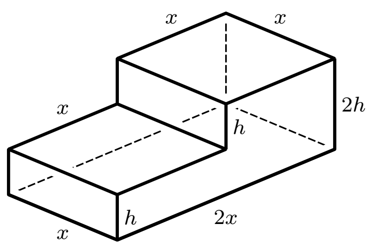
Problème 2. Analyse

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. On considère les fonctions $f(x) = x\, e^{1-x^2}$ et $g(x) = x$. On note C_f et C_g leurs courbes représentatives.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Déterminer les coordonnées du maximum de la fonction f.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I d'abscisse strictement positive des courbes C_f et C_g.
4. Esquisser les courbes C_f et C_g dans le premier quadrant.
5. Montrer que les courbes C_f et C_g sont perpendiculaires en I.
6. (a) Déterminer la valeur du réel α pour que $\left(\alpha\, e^{1-x^2}\right)' = f(x)$.
   (b) Calculer l'aire bornée délimitée par les courbes C_f et C_g dans le premier quadrant.

B. Un ami bricoleur souhaite construire un terrarium complètement vitré et fermé d'une contenance de $3\,\mathrm{m}^3$ selon le schéma suivant.



1. Montrer que la surface de verre S est donnée en fonction de x par $S(x) = 4\,x^2 + \dfrac{10}{x}$.
2. Déterminer les dimensions x et h qui minimisent la surface de verre.

Problème 3. Probabilités

On dispose de trois urnes nommées S (pour sujets), V (pour verbes) et C (pour compléments) contenant chacune des billets selon la description suivante.

$$S = \left\{ \boxed{\text{Le chat}} \,;\, \boxed{\text{Camille}} \,;\, \boxed{\text{La vache}} \right\}$$
$$V = \left\{ \boxed{\text{mange}} \,;\, \boxed{\text{boit}} \,;\, \boxed{\text{avale}} \right\}$$
$$C = \left\{ \boxed{\text{goulûment}} \,;\, \boxed{\text{rapidement}} \,;\, \boxed{\text{avec avidité}} \,;\, \boxed{\text{bruyamment}} \right\}$$

Pour former une phrase, on tire au sort un billet de chaque urne. Le premier billet est tiré de l'urne S, le deuxième de l'urne V, et le troisième de l'urne C.

Par exemple $\boxed{\text{Le chat}}\ \boxed{\text{avale}}\ \boxed{\text{goulûment}}$ est une phrase composée de trois billets tirés des urnes S, V et C, comprenant un total de 4 mots.

1. Calculer le nombre de phrases différentes que l'on peut ainsi former.
2. On forme une phrase.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir $\boxed{\text{Camille}}\ \boxed{\text{mange}}\ \boxed{\text{bruyamment}}$.
   (b) Calculer la probabilité que la phrase comporte $\boxed{\text{Le chat}}$ ou $\boxed{\text{goulûment}}$.
   (c) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 4 mots dans la phrase.
   (d) Calculer la probabilité que $\boxed{\text{Le chat}}$ apparaisse sachant qu'il y a 4 mots dans la phrase.
3. On forme successivement deux phrases. Tous les billets sont remis dans les bonnes urnes avant de former une nouvelle phrase.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois de suite la même phrase.
   (b) Calculer la probabilité que la seconde phrase contienne plus de mots que la première.
4. On forme successivement dix phrases. De nouveau, tous les billets sont remis dans les bonnes urnes avant de former une nouvelle phrase.
   (a) Calculer la probabilité que $\boxed{\text{Le chat}}$ apparaisse exactement 4 fois.
   (b) Calculer la probabilité que $\boxed{\text{Le chat}}$ et $\boxed{\text{Camille}}$ apparaissent chacun exactement 2 fois.
5. Calculer le nombre minimum de phrases qu'il faut former pour que la probabilité de lire au moins une fois $\boxed{\text{Camille}}\ \boxed{\text{mange}}\ \boxed{\text{bruyamment}}$ soit supérieure à 95%.

Problème 4. Géométrie

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne le plan α d'équation $x + 6y - 18z + 46 = 0$, le point $A(2; -2; 2)$, et la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 16y - 40z + 104 = 0$.

1. Montrer que les coordonnées du centre Ω de la sphère Σ sont $\Omega(1; -8; 20)$ et que son rayon vaut $r = 19$.
2. Montrer que le plan α est tangent à la sphère Σ au point A.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan α' strictement parallèle au plan α et tangent à la sphère Σ.

On donne encore le plan β d'équation $x - 4y + 8z - 112 = 0$.

4. Calculer l'angle entre les plans α et β.
5. (a) Calculer la distance du point Ω au plan β.
   (b) Justifier que le plan β coupe la sphère Σ.
6. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan β, passant par le point Ω.
   (b) Calculer les coordonnées du centre C et le rayon R du cercle d'intersection du plan β et de la sphère Σ.
7. Déterminer une représentation paramétrique de la droite t incluse dans le plan α, orthogonale à la droite d et passant par A.