CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2022**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

OS scientifiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80
«Formulaires et tables» à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Algèbre linéaire (15 points)

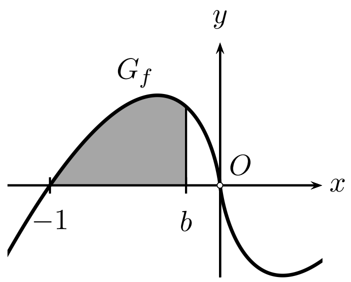
Pour un paramètre $s \in \mathbf{R}$, on pose $M_s = \begin{pmatrix} s & s^2-1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. On nomme Φ_s l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont M_s est sa matrice relativement à la base canonique.

1. Dans cette partie, on pose $s = -3$.
   (a) La matrice M_{-3} est-elle inversible ? Dans l'affirmative, calculer la matrice inverse de M_{-3}.
   (b) Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ_{-3}.
   (c) Donner une base de vecteurs propres, et interpréter géométriquement l'endomorphisme Φ_{-3}.
2. Désormais, s est à nouveau un nombre réel quelconque.
   (a) Calculer les valeurs de s pour lesquelles $\mathrm{Ker}(\Phi_s) \neq \{(0;0)\}$.
   (b) Soit $u(-7;2)$. Calculer les valeurs de s pour lesquelles u est un vecteur propre de Φ_s.

Problème 2. Analyse (15 points)

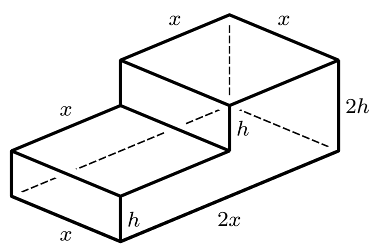
Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

A. On considère la fonction $f(x) = 2\,x\ln(x^2)$, dont le graphe G_f est esquissé ci-contre, et un réel $b \in \,]-1;0[$.
   1. Calculer l'aire de la surface grisée en fonction de b. On nomme $A(b)$ cette aire.
   2. Calculer $\lim\limits_{b\to 0} A(b)$.



B. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y' + 2\,x\,y = x$.

C. Un ami bricoleur souhaite construire un terrarium complètement vitré et fermé d'une contenance de 3 m^3 selon le schéma ci-contre.
   Déterminer les dimensions x et h qui minimisent la surface de verre.



Suite au verso

Problème 3. Étude d'une fonction (20 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4\left(x^2 - 6x + 5\right)}{x^2}$.

1. Étudier complètement la fonction f.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe représentative de f avec son asymptote non verticale.
3. Représenter graphiquement la fonction f (unité : 1 carré).

Problème 4. Géométrie (15 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne le plan α d'équation $x + 6y - 18z + 46 = 0$, le point $A(2; -2; 2)$, et la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 16y - 40z + 104 = 0$.

1. Montrer que les coordonnées du centre Ω de la sphère Σ sont $\Omega(1; -8; 20)$ et que son rayon vaut $r = 19$.
2. Montrer que le plan α est tangent à la sphère Σ au point A.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan α' strictement parallèle au plan α et tangent à la sphère Σ.

On donne encore le plan β d'équation $x - 4y + 8z - 112 = 0$.

4. (a) Calculer la distance du point Ω au plan β.
   (b) Justifier que le plan β coupe la sphère Σ.
5. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan β, passant par le point Ω.
   (b) Calculer les coordonnées du centre C et le rayon R du cercle d'intersection du plan β et de la sphère Σ.

Problème 5. Probabilités (15 points)

On dispose de trois urnes nommées S (pour sujets), V (pour verbes) et C (pour compléments) contenant chacune des billets selon la description suivante.

$$S = \left\{ \boxed{\text{Le chat}} \; ; \; \boxed{\text{Camille}} \; ; \; \boxed{\text{La vache}} \right\}$$
$$V = \left\{ \boxed{\text{mange}} \; ; \; \boxed{\text{boit}} \; ; \; \boxed{\text{avale}} \right\}$$
$$C = \left\{ \boxed{\text{goulûment}} \; ; \; \boxed{\text{rapidement}} \; ; \; \boxed{\text{avec avidité}} \; ; \; \boxed{\text{bruyamment}} \right\}$$

Pour former une phrase, on tire au sort un billet de chaque urne. Le premier billet est tiré de l'urne S, le deuxième de l'urne V, et le troisième de l'urne C.

Par exemple $\boxed{\text{Le chat}}\ \boxed{\text{avale}}\ \boxed{\text{goulûment}}$ est une phrase composée de trois billets tirés des urnes S, V et C, comprenant un total de 4 mots.

1. On forme une phrase.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir $\boxed{\text{Camille}}\ \boxed{\text{mange}}\ \boxed{\text{bruyamment}}$.
   (b) Calculer la probabilité que la phrase comporte $\boxed{\text{Le chat}}$ ou $\boxed{\text{goulûment}}$.
   (c) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 4 mots dans la phrase.
   (d) Calculer la probabilité que $\boxed{\text{Le chat}}$ apparaisse sachant qu'il y a 4 mots dans la phrase.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de mots de la phrase. Calculer l'espérance de X.
3. On forme successivement dix phrases. Tous les billets sont remis dans les bonnes urnes avant de former une nouvelle phrase.
   (a) Calculer la probabilité que $\boxed{\text{Le chat}}$ apparaisse exactement 4 fois.
   (b) Calculer la probabilité que $\boxed{\text{Le chat}}$ et $\boxed{\text{Camille}}$ apparaissent chacun exactement 2 fois.