CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy
t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2021**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

OS non scientifiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80 (20 points par problème)
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(4;3;1)$, $B(14;7;9)$, $C(-6;-5;-5)$ et $S(-3;4;7)$.

1. Établir une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Calculer l'angle aigu d'intersection entre la droite (AS) et le plan (ABC).
3. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à 30.
4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$.
5. Déterminer les coordonnées du point D, appartenant à la droite (AC), tel que le triangle ABD soit isocèle en D.
6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par le point B, incluse dans le plan (ABC) et perpendiculaire à la droite (AC).

Soit encore la droite n passant par S et orthogonale au plan (ABC).

7. Calculer les coordonnées du point d'intersection I entre la droite n et le plan (ABC).
8. Déterminer les coordonnées du point T, appartenant à la droite n et d'abscisse positive, tel que le volume du tétraèdre $ABCT$ soit égal à 60.

Problème 2. Analyse

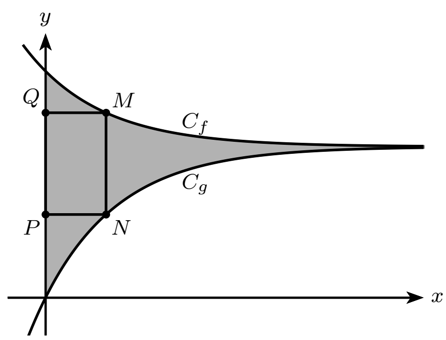
Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

A. Soit la fonction f définie par $f(x) = 4 - 9 \cdot (\ln(x+3))^2$.
   1. Donner son ensemble de définition.
   2. Cette fonction possède un extremum.
      a. S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ? Justifier.
      b. Calculer les coordonnées du point de son graphe associé à cet extremum.
   3. Calculer les abscisses de ses deux zéros.
   4. Calculer l'angle aigu que sa représentation graphique fait avec l'axe des ordonnées.

B. Calculer l'aire du domaine compris entre les deux courbes représentant les fonctions p et q définies par $p(x) = x^2 - 7x + 7$ et $q(x) = -x^2 + 5x - 3$.

C. Soient les deux fonctions f et g dont les graphes sont esquissés ci-contre et définies par $f(x) = e^{-x} + 2$ et $g(x) = -2e^{-x} + 2$. On considère également le domaine grisé entre les deux courbes représentant les fonctions et délimité à gauche par l'axe des ordonnées.

   Calculer l'aire du plus grand rectangle $MNPQ$ que l'on peut inscrire dans ce domaine, ses côtés étant parallèles aux axes.



Suite au verso

Problème 3. Étude d'une fonction

Étudier puis représenter (unité : 1 carré) la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^5}{(x^2-4)^2}$.

Au cours de l'étude, montrer que $f''(x) = \dfrac{-16x^3(x^2+20)}{(x^2-4)^4}$.

Problème 4. Probabilités

Dans le jeu télévisé *À prendre ou à laisser*, chacun des 24 **candidats** a devant lui une boîte fermée contenant une somme d'argent ou un clou (voir tableau ci-contre).

Au début de chaque émission, un tirage au sort est effectué parmi les 24 candidats pour déterminer celui qui joue lors de celle-ci, nommé ci-après le **joueur**. Il quitte le jeu après y avoir participé.

Pour la prochaine émission, les 23 autres candidats reviennent et sont rejoints par un nouveau candidat.

Jane et Brandon sont deux des 24 candidats à la première émission.

Contenu des 24 boîtes	
Un clou	**1 000 €**
0, 05 €	**1 500 €**
0, 10 €	**3 000 €**
0, 50 €	**4 000 €**
1 €	**5 000 €**
5 €	**10 000 €**
10 €	**15 000 €**
25 €	**20 000 €**
50 €	**30 000 €**
100 €	**50 000 €**
250 €	**100 000 €**
500 €	**500 000 €**

1. Calculer la probabilité que Jane joue à la première émission.
2. Calculer la probabilité que Jane joue à la première émission et qu'elle ait la boîte contenant 500 000 €.
3. Calculer la probabilité que Brandon joue à la centième émission.
4. On considère maintenant les 13 premières émissions.
   a. Calculer la probabilité que les joueurs aient exactement 5 fois une boîte contenant plus de 25 000 €.
   b. Calculer la probabilité que les joueurs des deux premières émissions aient une boîte contenant plus de 25 000 € sachant que les joueurs ont eu exactement 5 fois une boîte contenant plus de 25 000 €.
5. Combien d'émissions faut-il prévoir pour qu'il y ait plus de 95% de chance qu'au moins un joueur ait 500 000 € dans sa boîte ?

Pendant l'émission, le joueur ouvre une à une les boîtes des autres candidats, qui sont ainsi éliminées au fur et à mesure. Il remporte la somme d'argent contenue dans sa boîte, qui est ouverte en dernier.

En plus, le joueur gagne un voyage si l'une des trois premières boîtes qu'il ouvre contient le clou.

Au cours de l'émission, le joueur reçoit régulièrement des appels du **banquier**, qui lui propose notamment d'échanger sa boîte contre une autre encore fermée.

6. Calculer la probabilité que le joueur a de gagner le voyage.
7. Lors d'une émission, il reste 8 boîtes à ouvrir, contenant les sommes ci-dessous.

10 €	**5 000 €**
250 €	**10 000 €**
500 €	**30 000 €**
1 500 €	**500 000 €**

   a. Calculer la probabilité que les 4 prochaines boîtes révèlent toutes une somme supérieure à 1 000 €.
   b. Le banquier propose au joueur d'échanger sa boîte contre une des 7 autres. Calculer la probabilité, qu'en échangeant sa boîte, le joueur récupère une boîte contenant une somme supérieure à 1 000 €.