CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2021**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

OS Physique - Applications des mathématiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 94 points sur 100 (20 points par problème)
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Étude d'une courbe paramétrée

Étudier, puis représenter (unité : 3 carrés) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{4t-1}{t^2} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{e^t}{t}\,.$$

De plus, calculer les coordonnées des points d'abscisse $x = -5$ et les représenter également.

Problème 2. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(4;3;1)$, $B(14;7;9)$, $C(-6;-5;-5)$ et $S(-3;4;7)$.

1. Établir une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Calculer l'angle aigu d'intersection entre la droite (AS) et le plan (ABC).
3. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à 30.
4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$.
5. Déterminer les coordonnées du point D, appartenant à la droite (AC), tel que le triangle ABD soit isocèle en D.
6. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de rayon minimal qui contient le point $P(4;19;13)$ et qui est tangente à la droite (AC).

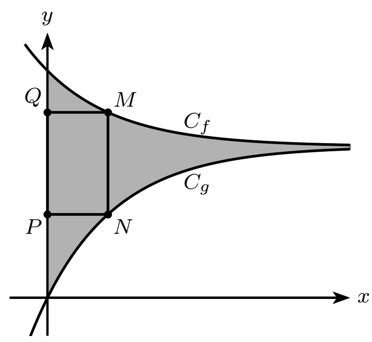
Problème 3. Analyse

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

A. Soit la fonction f définie par $f(x) = 4 - 9\cdot(\ln(x+3))^2$.

1. Donner son ensemble de définition.
2. Calculer les abscisses de ses deux zéros.
3. Calculer l'angle aigu que sa représentation graphique fait avec l'axe des ordonnées.

B. Soient les deux fonctions f et g dont les graphes sont esquissés ci-contre et définies par $f(x) = e^{-x} + 2$ et $g(x) = -2e^{-x} + 2$. On considère également le domaine D grisé ci-contre. Ce domaine est illimité à droite.



1. Calculer l'aire du domaine D.
2. Calculer le volume de solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox du domaine délimité par l'axe Oy, la courbe C_f et la droite horizontale $y = e^{-1} + 2$.
3. Calculer l'aire du plus grand rectangle $MNPQ$ que l'on peut inscrire dans le domaine D, ses côtés étant parallèles aux axes.

Problème 4. Equation différentielle et algèbre linéaire

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

A. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(1+x)y' + y = x^2 \ln(x)$.

B. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par sa matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer les valeurs propres de h et les sous-espaces propres associés.
2. Donner une base de vecteurs propres de h et exprimer sa matrice relativement à cette base.
3. Donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme h.
4. Déterminer le vecteur u_0 dont l'image par h est le vecteur $u_1 = (20; 24)$.
5. On considère maintenant une suite de transformations par l'endomorphisme h : le vecteur u_1 est l'image du vecteur u_0 (ainsi $h(u_0) = u_1$), le vecteur u_2 est l'image du vecteur u_1 (ainsi $h(u_1) = u_2$), le vecteur u_3 est l'image du vecteur u_2 (ainsi $h(u_2) = u_3$), et ainsi de suite.
Sans faire de calcul, donner une estimation des coordonnées du vecteur u_{1000}. *Justifier brièvement la réponse donnée.*

Problème 5. Probabilités

Dans le jeu télévisé *À prendre ou à laisser*, chacun des 24 **candidats** a devant lui une boîte fermée contenant une somme d'argent ou un clou (voir tableau ci-contre).

Au début de chaque émission, un tirage au sort est effectué parmi les 24 candidats pour déterminer celui qui joue lors de celle-ci, nommé ci-après le **joueur**. Il quitte le jeu après y avoir participé.

Pour la prochaine émission, les 23 autres candidats reviennent et sont rejoints par un nouveau candidat.

Jane et Brandon sont deux des 24 candidats à la première émission.

Contenu des 24 boîtes	
Un clou	**1 000 €**
0, 05 €	**1 500 €**
0, 10 €	**3 000 €**
0, 50 €	**4 000 €**
1 €	**5 000 €**
5 €	**10 000 €**
10 €	**15 000 €**
25 €	**20 000 €**
50 €	**30 000 €**
100 €	**50 000 €**
250 €	**100 000 €**
500 €	**500 000 €**

1. Calculer la probabilité que Jane joue à la première émission.
2. Calculer la probabilité que Jane joue à la première émission et qu'elle ait la boîte contenant 500 000 €.
3. Calculer la probabilité que Brandon joue à la centième émission.
4. On considère maintenant les 13 premières émissions.
   a. Calculer la probabilité que les joueurs aient exactement 5 fois une boîte contenant plus de 25 000 €.
   b. Calculer la probabilité que les joueurs des deux premières émissions aient une boîte contenant plus de 25 000 € sachant que les joueurs ont eu exactement 5 fois une boîte contenant plus de 25 000 €.
5. Calculer une approximation de la probabilité que le joueur ait entre 15 et 20 fois (bornes comprises) une boîte contenant plus de 25 000 €, lors des 100 premières émissions.

Pendant l'émission, le joueur ouvre une à une les boîtes des autres candidats, qui sont ainsi éliminées au fur et à mesure. Il remporte la somme d'argent contenue dans sa boîte, qui est ouverte en dernier.

En plus, le joueur gagne un voyage si l'une des trois premières boîtes qu'il ouvre contient le clou.

Au cours de l'émission, le joueur reçoit régulièrement des appels du **banquier**, qui lui propose notamment d'échanger sa boîte contre une autre encore fermée.

6. Calculer la probabilité que le joueur a de gagner le voyage.
7. Lors d'une émission, il reste 8 boîtes à ouvrir, contenant les sommes ci-contre.

10 €	**5 000 €**
250 €	**10 000 €**
500 €	**30 000 €**
1 500 €	**500 000 €**

   a. Calculer la probabilité que les 4 prochaines boîtes révèlent toutes une somme supérieure à 1 000 €.
   b. Le banquier propose au joueur d'échanger sa boîte contre une des 7 autres. Calculer la probabilité, qu'en échangeant sa boîte, le joueur récupère une boîte contenant une somme supérieure à 1 000 €.