

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
OS Biologie - Chimie

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80 (20 points par problème)
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(4; 3; 1)$, $B(14; 7; 9)$, $C(-6; -5; -5)$ et $S(-3; 4; 7)$.

1. Établir une équation cartésienne du plan (ABC) .
2. Calculer l'angle aigu d'intersection entre la droite (AS) et le plan (ABC) .
3. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à 30.
4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$.
5. Déterminer les coordonnées du point D , appartenant à la droite (AC) , tel que le triangle ABD soit isocèle en D .
6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par le point B , incluse dans le plan (ABC) et perpendiculaire à la droite (AC) .

Soit encore la droite n passant par S et orthogonale au plan (ABC) .

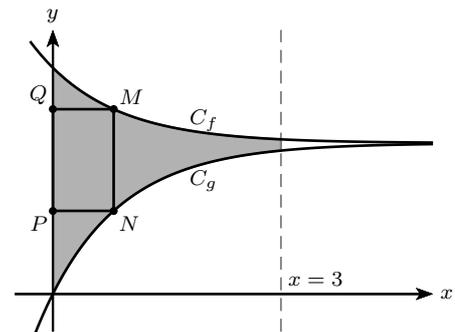
7. Calculer les coordonnées du point d'intersection I entre la droite n et le plan (ABC) .
8. Déterminer les équations cartésiennes des sphères tangentes au plan (ABC) en I et de volume égal à 288π .

Problème 2. Analyse et algèbre linéaire

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

A. Soient les deux fonctions f et g dont les graphes sont esquissés ci-contre et définies par $f(x) = e^{-x} + 2$ et $g(x) = -2e^{-x} + 2$.

1. Calculer l'angle aigu que fait la courbe représentant f avec l'axe des ordonnées.
2. Calculer l'aire du domaine grisé entre les deux courbes représentées, délimité à gauche par l'axe des ordonnées et à droite par la droite d'équation $x = 3$.
3. Calculer l'aire du plus grand rectangle $MNPQ$ que l'on peut inscrire dans ce domaine, ses côtés étant parallèles aux axes.



B. Soit h l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 donné par sa matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 .

1. Calculer les valeurs propres de h et les sous-espaces propres associés.
2. Donner une base de vecteurs propres de h et exprimer sa matrice relativement à cette base.
3. Donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme h .
4. Déterminer le vecteur u_0 dont l'image par h est le vecteur $u_1 = (20; 24)$.
5. On considère maintenant une suite de transformations par l'endomorphisme h : le vecteur u_1 est l'image du vecteur u_0 (ainsi $h(u_0) = u_1$), le vecteur u_2 est l'image du vecteur u_1 (ainsi $h(u_1) = u_2$), le vecteur u_3 est l'image du vecteur u_2 (ainsi $h(u_2) = u_3$), et ainsi de suite.

Sans faire de calcul, donner une estimation des coordonnées du vecteur u_{1000} . Justifier brièvement la réponse donnée.

Problème 3. Étude d'une fonction

Étudier puis représenter (unité : 1 carré) la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^5}{(x^2 - 4)^2}$.

Au cours de l'étude, montrer que $f''(x) = \frac{-16x^3(x^2 + 20)}{(x^2 - 4)^4}$.

Problème 4. Probabilités

Dans le jeu télévisé *À prendre ou à laisser*, chacun des 24 **candidats** a devant lui une boîte fermée contenant une somme d'argent ou un clou (voir tableau ci-contre).

Au début de chaque émission, un tirage au sort est effectué parmi les 24 candidats pour déterminer celui qui joue lors de celle-ci, nommé ci-après le **joueur**. Il quitte le jeu après y avoir participé.

Pour la prochaine émission, les 23 autres candidats reviennent et sont rejoints par un nouveau candidat.

Jane et Brandon sont deux des 24 candidats à la première émission.

- Calculer la probabilité que Jane joue à la première émission.
- Calculer la probabilité que Jane joue à la première émission et qu'elle ait la boîte contenant 500 000 €.
- Calculer la probabilité que Brandon joue à la centième émission.
- On considère maintenant les 13 premières émissions.
 - Calculer la probabilité que les joueurs aient exactement 5 fois une boîte contenant plus de 25 000 €.
 - Calculer la probabilité que les joueurs des deux premières émissions aient une boîte contenant plus de 25 000 € sachant que les joueurs ont eu exactement 5 fois une boîte contenant plus de 25 000 €.
- Calculer une approximation de la probabilité que le joueur ait entre 15 et 20 fois (bornes comprises) une boîte contenant plus de 25 000 €, lors des 100 premières émissions.

Pendant l'émission, le joueur ouvre une à une les boîtes des autres candidats, qui sont ainsi éliminées au fur et à mesure. Il remporte la somme d'argent contenue dans sa boîte, qui est ouverte en dernier.

En plus, le joueur gagne un voyage si l'une des trois premières boîtes qu'il ouvre contient le clou.

Au cours de l'émission, le joueur reçoit régulièrement des appels du **banquier**, qui lui propose notamment d'échanger sa boîte contre une autre encore fermée.

- Calculer la probabilité que le joueur a de gagner le voyage.
- Lors d'une émission, il reste 8 boîtes à ouvrir, contenant les sommes ci-dessous.

10 €	5 000 €
250 €	10 000 €
500 €	30 000 €
1 500 €	500 000 €

- Calculer la probabilité que les 4 prochaines boîtes révèlent toutes une somme supérieure à 1 000 €.
- Le banquier propose au joueur d'échanger sa boîte contre une des 7 autres. Calculer la probabilité, qu'en échangeant sa boîte, le joueur récupère une boîte contenant une somme supérieure à 1 000 €.

Contenu des 24 boîtes	
Un clou	1 000 €
0,05 €	1 500 €
0,10 €	3 000 €
0,50 €	4 000 €
1 €	5 000 €
5 €	10 000 €
10 €	15 000 €
25 €	20 000 €
50 €	30 000 €
100 €	50 000 €
250 €	100 000 €
500 €	500 000 €