

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES  
OS non scientifiques

Temps à disposition : 4 heures  
Note maximale (6) pour 75 points sur 80 (20 points par problème)  
« Formulaires et Tables » à disposition  
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Étude d'une fonction

Étudier, y compris la dérivée seconde, puis représenter (unité : 1 carré) la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = (x^2 + x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$

Problème 2. Analyse

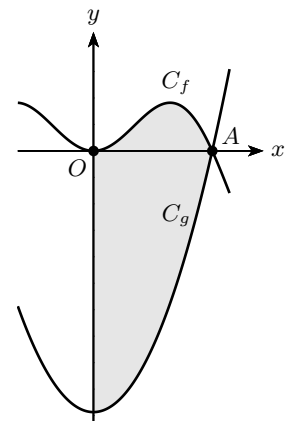
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. Soient les fonctions  $f$  et  $g$  dont les graphes sont esquissés ci-contre et définies par  $f(x) = x \sin(x)$  et  $g(x) = x^2 - \pi^2$ .

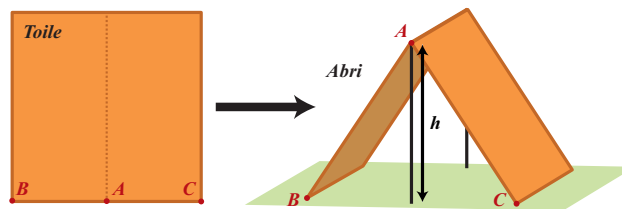
- Démontrer que la fonction  $f$  est paire.
- Calculer les coordonnées du point d'intersection  $A$  de la courbe  $C_g$  avec l'axe  $Ox$  et d'abscisse positive, puis montrer que ce point  $A$  appartient aussi à la courbe  $C_f$ .
- Calculer l'angle aigu d'intersection des deux courbes au point  $A$ .
- En intégrant par parties, montrer que

$$\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x) + C.$$

- Calculer l'aire grisée délimitée par les courbes  $C_f$ ,  $C_g$  et l'axe  $Oy$ .



B. On désire fabriquer un abri avec une toile carrée ayant une surface de  $16 \text{ m}^2$ . Celui-ci aura la forme d'une tente dont les deux ouvertures seront deux triangles isocèles de hauteur  $h$  selon la figure ci-dessous.



- Donner la longueur du côté  $[AB]$  du triangle isocèle  $ABC$ .
- Déterminer l'aire du triangle isocèle  $ABC$  en fonction de sa hauteur  $h$ .
- Montrer que le volume  $V$  de l'abri est donné en fonction de  $h$  par

$$V(h) = 4h\sqrt{4 - h^2}.$$

- Déterminer la hauteur  $h$  de l'abri pour que son volume soit maximum.

### Problème 3. Probabilités

Un lycée participe à un championnat de volleyball où les matchs ont lieu le mercredi. Huit personnes sont inscrites pour participer à ce championnat : trois filles (Fanny, Gabrielle et Hortense) et cinq garçons (Albert, Benjamin, Christophe, Didier et Éric). Chaque semaine, leur entraîneur procède à un tirage au sort pour constituer l'équipe de six joueurs qui jouera le match.

1. Déterminer le nombre d'équipes possibles.
2. Calculer la probabilité que ni Albert, ni Benjamin ne jouent ce mercredi.
3. Calculer la probabilité que Fanny et Albert jouent ce mercredi.
4. Calculer la probabilité que Fanny joue et Albert ne joue pas ce mercredi.
5. Montrer que la probabilité que les trois filles jouent ce mercredi est  $p = \frac{5}{14}$ .
6. Calculer la probabilité que les trois filles jouent ensemble exactement 2 mercredis sur les 10 suivants.
7. Calculer le nombre minimum de mercredis pour être sûr que la probabilité que les trois filles jouent au moins une fois ensemble soit supérieure à 95%.

Par ailleurs, Fanny et Albert pratiquent le volleyball, ce qui fait que lorsque les deux jouent, l'équipe gagne 3 fois sur 4. Si un seul des deux joue, l'équipe gagne 2 fois sur 3. Si aucun des deux ne joue, l'équipe gagne 1 fois sur 2.

8. Calculer la probabilité que l'équipe gagne ce mercredi.
9. Calculer la probabilité que Fanny et Albert aient joué si on sait que l'équipe a gagné ce mercredi.

### Problème 4. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les plans  $\pi_1$ , d'équation  $2x + y - 2z - 21 = 0$ , et  $\pi_2$ , d'équation  $x - 2y + 2z + 2 = 0$ , ainsi que les points  $A(1; 2; -4)$ ,  $B(0; 0; -6)$ ,  $C(3; 0; -3)$  et  $P(3; 3; -6)$ .

1. Établir une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
2. Montrer que le plan  $(ABC)$  est strictement parallèle au plan  $\pi_1$ .
3. Calculer l'angle aigu d'intersection des plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $d$  passant par le point  $P$  et perpendiculaire au plan  $\pi_1$ .
6. a) Trouver les points (deux solutions) de la droite  $d$  équidistants des plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .  
b) Vérifier que l'un de ces points est le point  $A$ .
7. Déterminer l'équation de la sphère  $\Sigma$  de centre  $A$  et tangente aux plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .