CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2019**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

OS Physique - Applications des mathématiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 94 points sur 100 (20 points par problème)
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Étude d'une courbe paramétrée

Étudier, puis représenter (unité : 1 cm, format paysage) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{3t+2}{t^2+3t+2} \qquad \text{et} \qquad y(t) = 5e^t \cdot \frac{t-2}{t+2}\,.$$

Problème 2. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les plans π_1, d'équation $2x + y - 2z - 21 = 0$, et π_2, d'équation $x - 2y + 2z + 2 = 0$, ainsi que les points $A(3; 3; -6)$ et $C(1; 2; -4)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par le point A et perpendiculaire au plan π_1.
2. Calculer l'angle aigu d'intersection des plans π_1 et π_2.
3. Déterminer les points de la droite d qui sont équidistants des plans π_1 et π_2.
4. Montrer que le point C appartient à la droite d et qu'il est équidistant du point A et du plan π_2.
5. Déterminer l'équation de la sphère Σ de centre C, passant par A et tangente au plan π_2.
6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite t tangente à la sphère Σ en A et parallèle au plan π_2.
7. Déterminer les coordonnées du point T en lequel la sphère Σ est tangente au plan π_2.
8. Calculer le volume du cône droit de sommet T, inscrit dans la sphère Σ et dont le cercle de base contient le point A.

Problème 3. Algèbre linéaire

Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$h((x; y; z)) = (-4x + 12z; -12x + 2y + 24z; -2x + 6z).$$

1. Déterminer le noyau et l'image de h, ainsi que leur dimension.
2. Déduire du point précédent une valeur propre et un vecteur propre associé de h.
3. Donner la matrice M de h relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. L'endomorphisme h est-il bijectif ? *Justifier la réponse donnée.*
5. Calculer les valeurs propres de h et les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
6. Donner une base de vecteurs propres de h et exprimer la matrice diagonale D de h relativement à cette base.
7. Donner l'expression de D^3.
8. À l'aide d'un changement de base adéquat, déterminer l'expression de M^3.
9. Interpréter géométriquement l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est M^3.

Problème 4. Probabilités

Un lycée participe à un championnat de volleyball où les matchs ont lieu le mercredi. Huit personnes sont inscrites pour participer à ce championnat : trois filles (Fanny, Gabrielle et Hortense) et cinq garçons (Albert, Benjamin, Christophe, Didier et Éric). Chaque semaine, leur entraîneur procède à un tirage au sort pour constituer l'équipe de six joueurs qui jouera le match.

1. Déterminer le nombre d'équipes possibles.
2. Calculer la probabilité que ni Albert, ni Benjamin ne jouent ce mercredi.
3. Calculer la probabilité que Fanny joue et Albert ne joue pas ce mercredi.
4. Calculer la probabilité qu'au moins quatre garçons jouent ce mercredi.
5. Montrer que la probabilité que les trois filles jouent ce mercredi est $p = \dfrac{5}{14}$.
6. Calculer la probabilité que les trois filles jouent ensemble exactement 2 mercredis sur les 10 suivants.
7. Lors de la saison, 49 matchs sont disputés. Calculer une approximation de la probabilité que les trois filles jouent ensemble entre 16 et 24 fois (bornes comprises).

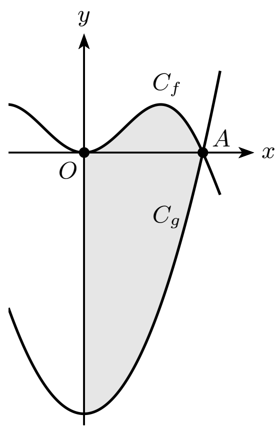
Par ailleurs, Fanny et Albert pratiquent le volleyball, ce qui fait que lorsque les deux jouent, l'équipe gagne 3 fois sur 4. Si un seul des deux joue, l'équipe gagne 2 fois sur 3. Si aucun des deux ne joue, l'équipe gagne 1 fois sur 2.

8. Calculer la probabilité que l'équipe gagne ce mercredi.
9. Calculer la probabilité que Fanny et Albert aient joué si on sait que l'équipe a gagné ce mercredi.

Problème 5. Analyse

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

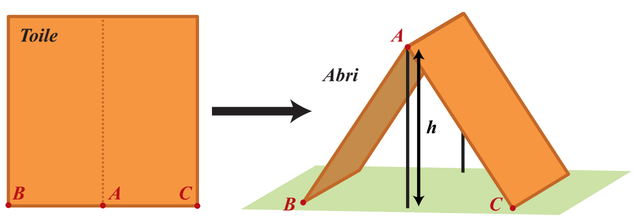
A. Soient les fonctions f et g dont les graphes sont esquissés ci-contre et définies par $f(x) = x\,\sin(x)$ et $g(x) = x^2 - \pi^2$.



1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe C_g avec l'axe Ox et d'abscisse positive, puis montrer que ce point A appartient aussi à la courbe C_f.
3. En intégrant par parties, montrer que
$$\int x \sin(x)\, dx = \sin(x) - x\cos(x) + C.$$
4. Calculer l'aire grisée délimitée par les courbes C_f, C_g et l'axe Oy.

B. On désire fabriquer un abri avec une toile carrée ayant une surface de 16 m^2. Celui-ci aura la forme d'une tente dont les deux ouvertures seront deux triangles isocèles de hauteur h selon la figure ci-dessous.

Déterminer la hauteur h de l'abri pour que son volume soit maximum.



C. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y' + \dfrac{2}{x}y = \ln(3x)$.