



Examen de Maturité 2009

OS Physique – Applications des mathématiques

MATHÉMATIQUES

- temps à disposition : 4 heures

- extrait des « Formulaires et Tables » à disposition

- note maximale (6) pour 5 problèmes justes

- machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1

Étudier, puis représenter graphiquement (unité : 1 cm) la courbe d'équations paramétriques :

$$x(t) = \frac{e^t}{t} \qquad y(t) = \frac{3t+1}{t^2-t}$$

Problème 2

On donne les quatre points $A(1; 1; 4)$, $B(9; 5; 12)$, $C(5; 6; 2)$ et $T(3; 2; 6)$.

1. Écrire une représentation paramétrique de la droite $d = (AB)$.
2. Calculer l'aire du triangle ABC .
3. Établir une équation cartésienne de la sphère Σ de centre C et passant par le point T .
4. Montrer que la droite d est tangente à la sphère Σ au point T .
5. Écrire une représentation paramétrique de la droite t tangente à la sphère Σ et coupant la droite d à angle droit en T .

L'ensemble des droites parallèles à la droite d et tangentes à la sphère Σ forment un cylindre κ .

6. On donne le point $D(5; 0; -4)$ appartenant au cylindre κ .
Établir l'équation cartésienne du plan tangent au cylindre κ en D .
7. On considère une partie du cylindre κ délimitée par deux cercles et de volume 540π . Un des cercles a pour centre le point C ; l'autre cercle a pour centre le point C' dont toutes les coordonnées sont positives. Déterminer le point C' .

Problème 3

a) Soit l'application linéaire h de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a , non nul, ayant pour image le vecteur nul.
2. Déterminer les valeurs propres de h et les vecteurs propres associés.
3. Écrire la matrice H' de h dans une base de vecteurs propres.
4. Déterminer la nature géométrique de l'application linéaire h .

b) Dans \mathbb{C} , on considère la fonction $f(z) = z + \frac{i}{z}$ et le nombre complexe $w = 1 + i$.

1. Calculer w^6 et représenter ce nombre dans le plan de Gauss.
2. Calculer le plus petit entier positif n tel que w^n soit un nombre réel supérieur à 2009.
3. Déterminer, sous forme cartésienne, l'image par f du nombre w .
4. Déterminer tous les nombres complexes qui ont pour image 2 par f .
5. Déterminer et représenter graphiquement dans le plan de Gauss l'image de l'axe imaginaire par f .

(suite au verso)

Problème 4

Chez l'homme, il existe quatre groupes sanguins : O , A , B et AB .

- a) A un repas d'anniversaire, 10 personnes sont réunies dans un chalet : 3 du groupe sanguin O , 4 du groupe sanguin A , 2 du groupe sanguin B et 1 du groupe sanguin AB . Après le repas, par tirage au sort, on désigne successivement 3 personnes pour faire la vaisselle.

Calculer la probabilité des événements suivants :

E_1 : exactement deux personnes du groupe sanguin A sont désignées

E_2 : la deuxième personne choisie est du groupe sanguin B

E_3 : les 3 personnes désignées ont le même groupe sanguin

E_4 : les 3 personnes désignées ont des groupes sanguins différents.

- b) Dans chaque groupe, il y a deux facteurs Rhésus : + et -. En Suisse, la répartition de la population selon les divers groupes sanguins et facteurs Rhésus est donnée par ce tableau :

| | O | A | B | AB |
|----------|-----|-----|-----|------|
| Rhésus + | 35% | 40% | 7% | 3% |
| Rhésus - | 6% | 7% | 1% | 1% |

1. On rencontre au hasard une personne de nationalité suisse.

Calculer la probabilité des événements suivants :

E_5 : cette personne est du groupe sanguin A

E_6 : cette personne est du groupe sanguin A sachant qu'elle a un facteur Rhésus -.

2. Dans un lycée, une classe compte 20 élèves de nationalité suisse. Calculer la probabilité des événements suivants :

E_7 : exactement sept élèves de cette classe sont du groupe sanguin A

E_8 : dans cette classe, on recense cinq élèves de chaque groupe sanguin.

3. Cent personnes de nationalité suisse participent à un congrès.

Calculer une approximation de la probabilité que, parmi les personnes présentes, il y a entre 38 et 50 (bornes comprises) individus du groupe sanguin A .

Problème 5 (les 7 questions sont indépendantes les unes des autres)

1. Combien de fois se coupent les graphes des fonctions $f(x) = e^x + 1$ et $g(x) = \cos(2x)$?

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sin(2x-2)}$.

3. Combien de points d'inflexion compte la fonction $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 9$?

4. Résoudre $e^{x^3+3x^2-4} = 1$.

5. Résoudre $\log(3x) + 2 \log(x) = 1$.

6. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1+y^3}{x y^2 (1+x^2)} = 0$.

Aide : $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)}$

7. Soit la courbe de la fonction $f(x) = 9-x^2$ dans l'intervalle $[0 ; 3]$. On dessine un carré de côté $f(x)$ comme sur le dessin ci-contre. Calculer l'abscisse t pour que l'aire A soit maximale.

