MATHÉMATIQUES

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 4 problèmes justes
Fascicule "Extrait des formulaires et tables" à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1

1.1 Étudier, puis représenter (unité : 1 cm) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{6}{t(t-4)} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{(t-5)^2}{t-4}.$$

1.2 Soit le point $I\big(x(t_1), y(t_1)\big),\ t_1 = 2+\sqrt{3}$. Pour quelle valeur $t_2 \neq t_1$ la courbe passe-t-elle une deuxième fois par le point I ?

Problème 2

Première partie

Soit le nombre complexe $z = \alpha + \frac{1}{2}\, i,\ \alpha \in \mathbf{R}_+$.

2.1 Déterminer en fonction de α le module et l'argument de z ainsi que de $z^n,\ n \geq 1$.

2.2 Pour quelle(s) valeur(s) de α la suite des nombres complexes $z, z^2, z^3, \ldots, z^n, \ldots$, représentés dans le plan de Gauss, se rapproche-elle de l'origine ? s'éloigne-t-elle de l'origine ? reste-t-elle à distance constante de l'origine ?

2.3 Déterminer la plus petite valeur de α strictement positive pour laquelle le nombre $z^6 \in \mathbf{R}$.

Pour la suite de cette première partie, on pose $\alpha = \frac{1}{2}$.

2.4 Déterminer $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$, z^n est situé à l'intérieur du disque centré à l'origine et de rayon $r = \frac{1}{100}$.

2.5 Calculer en fonction de n le module de $z^{n+1} - z^n = z^n(z-1)$. Que représente géométriquement ce module ?

2.6 Démontrer que la suite des longueurs des segments $[z^n\ z^{n+1}]$ est une suite géométrique puis calculer la longueur de la ligne polygonale $[z\ z^2\ z^3 ...\ z^n]$ lorsque n tend vers infini.

Deuxième partie

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ possèdent les propriétés suivantes.

a) La fonction $f(x)$ est solution de l'équation différentielle $2xy' - 3y = 0$.

b) La fonction $g(x)$ est solution de l'équation différentielle $y'' = 2$.

c) Les courbes représentatives des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ se coupent au point $I(4, 8)$.

d) La pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction $g(x)$ au point I est égale à 10.

Déterminer les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

Suite au verso

Problème 3

On donne les quatre points $A(-6;1;2)$, $B(-3;5;5)$, $C(-2;-2;1)$ et $D(8;-1;1)$ ainsi que la droite a : $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$. On note π le plan (ABC), $\mathcal{K}$ le cylindre d'axe a et de rayon 3, et enfin α désigne le plan d'équation : $-x + 2y + 2z + 8 = 0$.

3.1 Écrire l'équation cartésienne du plan π.

3.2 Calculer l'angle formé par la droite a et le plan π.

3.3 Montrer que le point D appartient au cylindre $\mathcal{K}$.

3.4 Déterminer l'équation de la sphère Σ tangente intérieurement au cylindre $\mathcal{K}$ en un cercle passant par le point D.

3.5 Montrer que le plan α contient le point D et qu'il est tangent au cylindre $\mathcal{K}$.

3.6 Calculer les coordonnées du point I qui est l'intersection de la génératrice du cylindre $\mathcal{K}$ passant par D et du plan π.

3.7 Écrire une représentation paramétrique de la droite t contenue dans le plan π et tangente au cylindre $\mathcal{K}$ au point I.

Problème 4

Une urne contient 10 boules noires et n boules rouges. L'expérience $\mathcal{E}$ consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne. On note p_1 la probabilité d'obtenir deux boules de couleur différente, p_2 la probabilité d'obtenir deux boules noires et p_3 la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

4.1 Montrer que la probabilité p_1 peut être exprimée par $p_1 = \frac{20n}{n^2+19n+90}$.

4.2 Pour une mise de 5 francs, un joueur peut réaliser l'expérience $\mathcal{E}$. Le joueur gagne 10 francs s'il obtient deux boules de couleur différente et ne gagne rien dans les autres cas. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.

Pour la suite du problème, on pose $n = 5$.

4.3 Calculer les probabilités p_1, p_2 et p_3.

4.4 L'expérience $\mathcal{E}$ est réalisée 4 fois (on remet dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience). Calculer la probabilité des événements suivants.

A : Obtenir exactement 3 fois deux boules noires.

B : Obtenir exactement 2 fois deux boules noires et 1 fois deux boules rouges.

C : Exactement 3 boules rouges ont été sorties de l'urne au cours des quatre expériences.

D : Obtenir exactement une fois deux boules rouges sachant qu'exactement deux expériences ont donné deux boules de couleur différente.

4.5 Combien de fois faut-il réaliser l'expérience $\mathcal{E}$ pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois deux boules de couleur différente soit supérieure à 0.99 ?

4.6 L'expérience $\mathcal{E}$ est réalisée 150 fois. Calculer une valeur approximative de la probabilité d'obtenir entre 70 et 80 fois deux boules de couleur différente (bornes comprises) en justifiant votre méthode de calcul.