Lycée cantonal
Porrentruy

Examen de Maturité 2006
Discipline fondamentale

MATHÉMATIQUES

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 4 problèmes justes
- extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

---

Problème 1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{5x^2 - 20x}{(x+1)^2}$$

1. Étudier la fonction f (y compris la dérivée seconde).
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection du graphe de f avec son asymptote oblique ou horizontale.
3. Calculer la pente de la droite t, tangente au graphe de f au point d'inflexion.
4. Représenter graphiquement la fonction f avec la droite t (unité : 2 carrés ou 1 cm sur feuille millimétrée).

Problème 2

Une maladie étrange a atteint un très grand élevage de poules pondeuses. 1% de la population de cet élevage est infectée. Lorsqu'une poule est infectée, deux fois sur trois son œuf n'est pas comestible (il a mauvais goût, ce que l'on ne peut savoir qu'après l'avoir goûté). Quant aux œufs des poules saines, ils sont tous comestibles.

On admettra que toutes les poules ont le même rythme de ponte.

1. On prélève au hasard un œuf de cet élevage. Calculer la probabilité des événements :
   - A : cet œuf n'est pas comestible.
   - B : cet œuf est comestible.
   - C : la poule qui l'a pondu est malade, sachant que l'œuf est comestible.
2. Jacques achète un carton de six œufs. Calculer la probabilité des événements :
   - D : il y a exactement deux œufs non comestibles.
   - E : il y a exactement cinq œufs comestibles dont exactement deux de poules malades.
   - F : le premier œuf qu'il goûte est comestible, sachant qu'il y a exactement trois œufs non comestibles.
3. Jacques décide qu'au deuxième œuf non comestible trouvé dans le carton il envoie une réclamation à l'éleveur. Calculer la probabilité des événements :
   - G : il n'envoie pas de réclamation.
   - H : il envoie une réclamation après le quatrième œuf goûté.
4. Combien faudrait-il prélever d'œufs de cet élevage pour que la probabilité d'en avoir au moins un non comestible soit supérieur à 0.95 ?

(suite au verso)

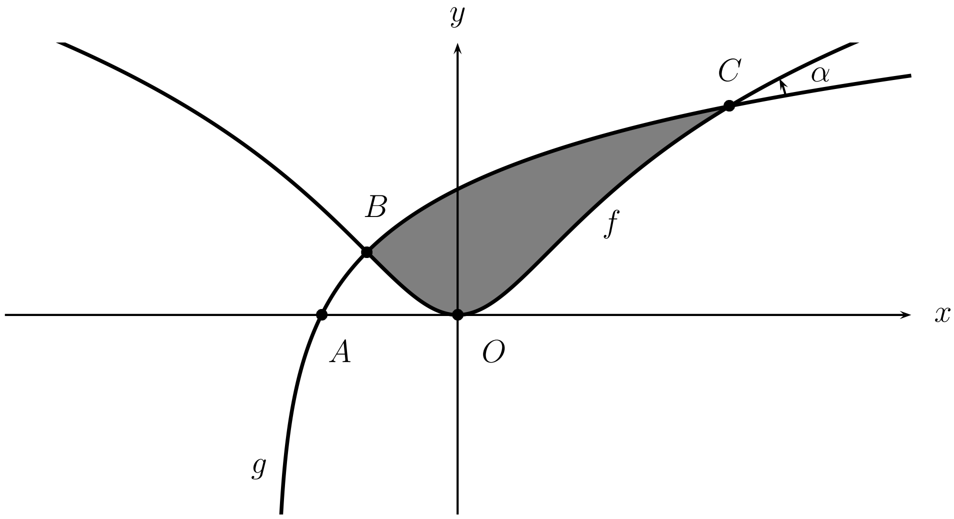
Problème 3

Dans un repère orthonormé, on donne le triangle ABC par $A(26;70;2)$, $B(1;34;50)$ et $C(1;38;53)$.

1. Vérifier que le triangle ABC est rectangle en B.
2. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC ainsi que le rayon de ce cercle.
3. Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.
4. Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC).
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par A et orthogonale au plan (ABC).
6. Calculer les coordonnées des points E et F appartenant à la droite d et situés à distance 26 du plan (ABC).
7. Calculer le volume du tétraèdre $ABCE$.

Problème 4

On considère les fonctions $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ et $g(x) = \ln(2x + 4)$ représentées graphiquement ci-dessous :



1. Calculer les coordonnées des points A, B, C.
2. Donner l'équation de l'asymptote (verticale) de g.
3. Prouver que l'origine O est bien le minimum de f.
4. Calculer les coordonnées des points d'inflexion de f.
5. Établir l'équation de t, tangente au graphe de f en B.
6. Calculer l'angle α entre les deux courbes au point C.
7. Déterminer la longueur du plus grand segment vertical que l'on peut inclure dans la surface grisée.
8. Calculer l'aire finie comprise entre le graphe de g et le segment $[BC]$.